

Eksamensløsninger - HSTAT1101 - januar 2025

Oppgave 1

Oppgaven spør etter standardaviket i en populasjonen, vi bruker derfor følgende formel for å regne ut standardaviket $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$.

$$\mu = 4 \text{ (gjennomsnitt)}$$

$$\sigma^2 = 2.67 \text{ (varians)}$$

$$\sigma = 1.633 \text{ (standardavvik)}$$

Oppgave 2

a)

- Konfidensintervallet sier noe om usikkerheten rundt estimatet og hvorvidt vi tror det sanne populasjonsgjennomsnittet ligger i dette intervallet.
- Du behøver standardavviket, antallet og et signifikansnivå for å regne ut konfidensintervallet. I tillegg må du anta en fordeling.

b)

- $\alpha = 5\%$
- H_0 : Kostnadene er lik
- H_1 : Kostnadene er ikke lik
- Antar normalfordeling (kritiske verdier fra z-fordelingen)

c)

- Normalfordelingen.
- Alle normalfordelinger, kan per definisjon, blir omgjort til en z-fordeling gjennom konvertering av X til Z. Det betyr at vi kan regne ut sannsynligheter ved bruk av z-fordelingen, som er enklere ved hjelp av tabellen i boken, for alle mulige normalfordelinger.
- Normalfordelingen har følgende egenskaper: symmetrisk, median/snitt/typetall er likt, karakterisert ved gjennomsnitt og standardavvik.
- Hvorvidt vi har informasjon på utvalget eller populasjonen bestemmer om vi skal bruke z- eller t-fordelingen. Har vi informasjon om populasjonen, så bruker vi z-fordelingen, har vi informasjon om utvalget bruker vi t-fordelingen. Noter at t-fordelingen går mot en z-fordeling når utvalgsstørrelsen øker.

Oppgave 3

d)

$$P(\text{konge}) = \frac{4}{52}$$

e)

Med tilbakelegging: $P(\text{to konger}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \text{ca } 0.59$
Uten tilbakelegging: $P(\text{to konger}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \text{ca } 0.45$

f)

$$\frac{52!}{3!(52-3)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 22100$$

g)

Vi kan regne ut sannsynligheten for at ingen kort er konger. Det er da følgende antall kombinasjoner uten konger (da vi tar bort de mulighetene fra utregningen).

$$\frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{103776}{6} = 17296$$

Vi regner deretter utsansynligheten for dette:

$$P(\text{Ingen konger}) = \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{17296}{22100} \approx 0.7826$$

Deretter bruker vi komplementregelen:

$$P(\text{Minst én konge}) = 1 - P(\text{Ingen konger}) = 1 - 0.7826 \approx 0.2174$$

Oppgave 4

$$P(Z \leq 1.85) = 0.9678 = 1 - 0.9678 = 0.0644$$

Oppgave 5

Ved bruk av individuelle binomisk fordelingen. Noter at vi ikke inkluderer 1 og 3 i utregningen.

$$P(X = 4) = 0.0.2965$$

Oppgave 6

a)

Vi skal regne ut en eksakt sannsynlighet og trenger ikke å bruke den kumulative fordelingen.

$$P(X = 4) = 0.1954$$

b)

Ved bruk av den kumulative Poisson-fordelingen

$$P(19 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 18) = 0.8878 - 0.3814 = 0.5064$$

Oppgave 7

Formelen for konfidensintervallet for et gjennomsnitt er når vi må bruke t-fordelingen (pga vi bare vet standardavviket i utvalget).

$$\begin{aligned} X \pm t_{n-1, \alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}} \\ 3.5 \pm 2.145 \cdot \frac{1.1}{\sqrt{15}} \\ (2.89, 4.11) \end{aligned}$$

Oppgave 8

a)

Basert på informasjonen i oppgaven opp følgende tabell:

Table 1:

	P(hjemme)	P(ikke hjemme)	
P(kino)	$0.15 \cdot 0.35 = 0.0525$		0.20
P(ikke kino)			
	0.35		1

Ved bruk av sannsynlighetsreglene (komplementregelen) kan vi fylle ut resten av tabellen og dermed få ut de marginale og simultane sannsynlighetene.

Table 2:

	P(hjemme)	P(ikke hjemme)	
P(kino)	$0.15 \cdot 0.35 = 0.0525$	$0.2 - 0.0525 = 0.1475$	0.20
P(ikke kino)	$0.35 - 0.0525 = 0.2975$	$0.65 - 0.1475 = 0.5025$	$1 - 0.2 = 0.8$
	0.35	$1 - 0.35 = 0.65$	1

b)

To begivenheter, A og B, er uavhengige hvis sannsynligheten for at begge skjer er lik produktet av sannsynlighetene for hver enkelt begivenhet. To begivenheter avhengige hvis sannsynligheten for at begge skjer ikke er lik produktet av sannsynlighetene for hver enkelt begivenhet.

c)

Vi har fått oppgitt at undersøkelsen ble gjort blant et utvalg studenter. Informasjonen vi har fått utgitt er derfor for utvalget, ikke populasjonen. Men utvalget er relativt stort (150), så vi kan bruke z-fordelingen som en tilnærming til t-fordelingen selvom vi ikke vet populasjonsvariansene.

$$\begin{aligned}
 & (X) \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_x^2}{n_x}} \\
 & (4) \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1.5^2}{150}} \\
 & 4 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2.25}{150}} \\
 & 4 \pm 1.96 \cdot \sqrt{0.015} \\
 & 4 \pm 1.96 \cdot 0.122 \\
 & 4 \pm 0.239 \\
 & (3.76, 4.24)
 \end{aligned}$$

d)

- $Y = \text{Avislesing}$
- $X = \text{TV-serier}$
- $H_0 : \mu_x = \mu_y$ vs. $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$
- $150 = N_x = N_y$
- $\mu_Y = 3$
- $\mu_X = 4$

- $3 = \sigma_y$
- $1.5 = \sigma_x$
- $\alpha = 0.10$
- $Z_{kritisk, \alpha/2} = 1.645$

$$Z_{observert} = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} = \frac{(4 - 3)}{\sqrt{\frac{1.5^2}{150} + \frac{3^2}{150}}} = 3.65$$

Ettersom den observerte Z-verdien er større enn den kritiske verdien, forkaster vi nullhypotesen.

e)

Disse gjennomsnittene hadde vært normalfordelt. Forventningsverdien er lik populasjonsverdien. Sentralgrenseteoremet ligger bak og sier at alle tilfeldige utvalgsgjennomsnitt går mot en normaldeling når utvalget øker.